BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М.И.АЛИЗАДЕ

Бакинский Государственный Университет

В этой статье выведана переопределенная система дифференциальных уравнений с частными производными. Получены необходимые и достаточные условия для полной разрешимости систем дифференциальных уравнений.

В этой статье доказывается, что каждое непрерывно дифференцируемое решение системы функциональных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \Phi(xy) &= \Phi(x)\Phi(y) + \sigma(x)\sigma(y), \\ \sigma(xy) &= \sigma(x)\Phi(y) + \Phi(x)\sigma(y), \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

с начальным условием

$$\left.\begin{aligned} \Phi(E) &= E, \\ \sigma(E) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

является одновременно решением одной переопределенной системы дифференциальных уравнений [1,2,3].

Теорема 1. Если система функциональных уравнений (*) в окрестности единичной матрицы $X = E$ имеет непрерывно дифференцируемое решение, удовлетворяющее начальному условию (**), то это решение одновременно является решением переопределенной системы дифференциальных уравнений с частными производными вида:

$$\left.\begin{aligned} |x|\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_{sq}} &= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |x|}{\partial x_{sp}} \left[\Phi(x)A^{pq} + \sigma(x)A^{pq}\right], \\ |x|\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_{sq}} &= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |x|}{\partial x_{sp}} \left[\sigma(x)A^{pq} + \Phi(x)B^{pq}\right], \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

$$s, q = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_{sq}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_{11}(x)}{\partial x_{sq}} & \dots & \frac{\partial\varphi_{1\nu}(x)}{\partial x_{sq}}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\varphi_{\nu 1}(x)}{\partial x_{sq}} & \dots & \frac{\partial\varphi_{\nu\nu}(x)}{\partial x_{sq}}\end{pmatrix},\ \frac{\partial\sigma(x)}{\partial x_{sq}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\sigma_{11}(x)}{\partial x_{sq}} & \dots & \frac{\partial\sigma_{1\nu}(x)}{\partial x_{sq}}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\sigma_{\nu 1}(x)}{\partial x_{sq}} & \dots & \frac{\partial\sigma_{w}(x)}{\partial x_{sq}}\end{pmatrix},$$

A^{pq} и B^{pq} являются квадратными постоянными матрицами порядка ν. А $|x| = dl + X$ есть детерминант матрицы X.

Доказательство. Предположим, что пара функций $(\Phi(x),\sigma(x))$ является решением системы функциональных уравнений (*). Подставляя это решение в систему уравнений (1) получаем тождество:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(xy)&\equiv\Phi(x)\Phi(y)+\sigma(x)\sigma(y),\\ \sigma(xy)&\equiv\sigma(x)\Phi(y)+\Phi(x)\sigma(y)\end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Положим:

$$Z = XY. \tag{3}$$

Если (3) перепишем по элементам, то получим:

$$Z_{rq}=\sum_{p=1}^{n}x_{rq}y_{rq}\quad (r,q=1,2,\dots,n). \tag{4}$$

Продифференцируя тождество по элементам имеем:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}x_{rp}\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_{rq}}&=\Phi(x)\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_{pq}}+\sigma(x)\frac{\partial\sigma(y)}{\partial y_{pq}},\\ \sum_{r=1}^{n}x_{rp}\frac{\partial\sigma(z)}{\partial z_{rq}}&=\sigma(x)\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_{pq}}+\Phi(x)\frac{\partial\sigma(y)}{\partial y_{pq}}.\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения:

$$\left\{\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_{pq}}\right\}_{y=E}=A^{pq};\quad \left\{\frac{\partial\sigma(y)}{\partial y_{pq}}\right\}_{y=E}=B^{pq}. \tag{6}$$

При $y = E$ из (5), учитывая (6), получаем:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}x_{rp}\frac{\partial\Phi(z)}{\partial x_{rq}}&=\Phi(x)A^{pq}+\sigma(x)B^{pq},\\ \sum_{r=1}^{n}x_{rp}\frac{\partial\sigma(z)}{\partial x_{rq}}&=\sigma(x)A^{pq}+\Phi(x)B^{pq},\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

$$p,q=1,2,\dots n.$$

Теперь решим систему уравнений (7) относительно частных производных. Для этой цели мы пользуемся следующими равенствами:

$$\sum_{p=1}^{n} x_{rp} \frac{\partial |x|}{\partial x_{sp}} = e_{rs} |x| ; \quad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial |x|}{\partial x_{sp}} x_{rt} = e_{rt} |x| . \qquad (8)$$

Нужно отметить, что эти равенства являются разложением детерминанта по элементам соответствующих строк и столбец.

Если обе стороны уравнений (7) умножить на $\frac{\partial |x|}{\partial x_{sp}}$, затем просуммировать по p и учесть первое равенство из (8), то получим:

$$\left.\begin{aligned} |x| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_{sq}} &= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |x|}{\partial x_{sp}} \left[\Phi(x) A^{pq} + \sigma(x) B^{pq} \right], \\ |x| \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_{sq}} &= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial |x|}{\partial x_{sp}} \left[\sigma(x) A^{pq} + \Phi(x) B^{pq} \right], \end{aligned}\right\} . \qquad (9)$$

$$s, q = 1,2,...n .$$

Если каждое уравнение системы (7) умножить на x_{st} и просуммировать по S , и учесть второе выражение (8), то получим опять систему уравнений (7).

Таким образом, из системы (7) переходим к системе (9) и наоборот. Следовательно, мы в итоге доказали, что каждое непрерывно дифференцируемое решение (в частности, аналитическое решение) в окрестности единичной матрицы, удовлетворяющее начальному условию (**), одновременно является решением переопределенной системы дифференциальных уравнений с частными производными вида (7) или (9).

Ясно, что система дифференциальных уравнений (7) состоит из $2n^2$ уравнений относительно матриц Φ и σ, и $2\nu^2$ уравнений относительно неизвестных функций $\varphi_{11}, \varphi_{12}, ..., \varphi_{\nu\nu}; \sigma_{11}, \sigma_{12}, ..., \sigma_{\nu\nu}$, а всего имеем $2n^2\nu^2$ уравнений.

Для того, чтобы переопределенная система (1) дифференциальных уравнений с частными производными имела хотя бы одно решение, отличное от тривиального решения, постоянные матрицы A^{pq} и B^{pq} должны удовлетворять некоторому условию вполне интегрируемости. Однако и это не достаточно [4,5].

Если даже матрицы A^{pq} и B^{pq} $(p, q = 1,2,...,n)$ будут удовлетворять некоторым условиям вполне интегрируемости, то решение переопределенной системы дифференциальных уравнений (1) не будет удовлетворять системе функциональных уравнений (*). Для того, чтобы такое решение было решением системы функциональных уравнений, (*) кроме прочих, необходимо выполнение начального условия (**).

Эта проблема решается в следующей теореме.

Теорема 2. Каждое аналитическое решение переопределенной системы дифференциальных уравнений (*) в окрестности единичной матрицы $X=E$, удовлетворяющее начальным условиям $\Phi(E)=E$, $\sigma(E)=0$, одновременно является решением системы функциональных уравнений (*).

Для доказательства теоремы 2 сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. Каждое аналитическое решение переопределенной системы дифференциальных уравнений (1) с частными производными также является решением следующей системы дифференциальных уравнений k-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} |x|^k \cdot \frac{\partial^k \Phi(x)}{\partial x_{s_1q_1} \ldots \partial x_{s_kq_k}} &= \sum_{p_1\cdots p_k} \frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}} \cdots \frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}} \left[\Phi(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \sigma(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right], \\ |x|^k \cdot \frac{\partial^k \sigma(x)}{\partial x_{s_1q_1} \ldots \partial x_{s_kq_k}} &= \sum_{p_1\cdots p_k} \frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}} \cdots \frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}} \left[\sigma(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \Phi(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right] \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

,

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^k \Phi(x)}{\partial x_{s_1q_1} \ldots \partial x_{s_kq_k}} &= \sum_{p_1\cdots p_k} \frac{\partial \ln|x|}{\partial x_{s_1p_1}} \cdots \frac{\partial \ln|x|}{\partial x_{s_kp_k}} \left[\Phi(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \sigma(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right], \\ \frac{\partial^k \sigma(x)}{\partial x_{s_1q_1} \ldots \partial x_{s_kq_k}} &= \sum_{p_1\cdots p_k} \frac{\partial \ln|x|}{\partial x_{s_1p_1}} \cdots \frac{\partial \ln|x|}{\partial x_{s_kp_k}} \left[\sigma(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \Phi(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right], \end{aligned}\right\}, \quad (10)$$

где $\sum\limits_{p_1\cdots p_k} = \sum\limits_{p_1=1}^{n} \cdots \sum\limits_{p_k=1}^{k}$ и $s_1, q_1, s_2, q_2, \ldots, s_k, q_k = 1,2,\ldots,n$.

Если $k=1$, то $A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}$, $B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}$-постоянные матрицы совпадают с коэффициентами A^{pq}, B^{pq} системы дифференциальных уравнений (1) соответственно. При $k>1$ коэффициенты системы дифференциальных уравнений (10) определяются из следующих рекуррентных формул:

$$A^{p_1q_1\cdots p_kq_k;pq} = A^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + B^{pq}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k} - e_{p_1q}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} - \ldots - e_{p_kq}A^{p_1q_1\cdots p_{k-1}q_{k-1}pq_k}, \quad (11)$$

$$B^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq} = B^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + A^{pq}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k} - e_{p_1q}B^{pq_1p_2q_2\cdots p_kq_k} - \ldots - e_{p_kq}B^{p_1q_1\cdots pq_k}. \quad (12)$$

Справедливость системы (10) докажем методом математической индукции. При $k=1$ (10) и (9) совпадают. Теперь предположим, что система справедлива при k, докажем её справедливость для $k+1$. Сначала будем доказывать справедливость первого соотношения системы дифференциальных уравнений (10), а затем второго соотношения системы (10). Для этой цели, обе части первого уравнения системы (10) умножим на

$|x|^{-k} = (\det X)^{-1}$ и продифференцируем по элементу x_{sq}. При этом под знаком суммы $\sum\limits_{p_1\cdots p_k}$ появляются новые выражения в виде с частными производными второго порядка: $|x|\dfrac{\partial^2|x|}{\partial x_{sq}\partial x_{rt}}$. Мы заменяем эти выражения по формуле:

$$|x|\frac{\partial^2|x|}{\partial x_{sq}\partial x_{rt}} = \frac{\partial|x|}{\partial x_{sq}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{rt}} - \frac{\partial|x|}{\partial x_{st}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{rq}}. \tag{13}$$

Это соотношение есть связь между алгебраическими дополнениями в одном и том же детерминанте.

После подставления (13) в систему уравнений (10) каждый такой член распадается на разность двух членов. Как видно из (13), k -штук первые члены друг друга уничтожают. В дифференцировании будут участвовать и следующие выражения:

$$-k|x|^{k-1}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}}\cdot\frac{\partial|x|}{\partial x_{sq}}\left[\Phi(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \sigma(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right].$$

Такие члены будут равными, но с разными знаками, поэтому они друг друга уничтожают. После упрощения полученных систем дифференциальных уравнений, умножая ее на $|x|^{k+1} = (\det X)^{k+1}$, получим (для первого уравнения системы) выражения:

$$|x|^{k+1}\frac{\partial^{k+1}\Phi(x)}{\partial x_{s_1q_1}\ldots\partial x_{s_kq_k}\partial x_{sq}} = \sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1q_1}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kq_k}}\left[|x|\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_{sq}}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + |x|\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x_{sq}}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right] -$$

$$-\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1q}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}}\left[\Phi(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \sigma(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right] - \ldots -$$

$$-\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_{k-1}p_{k-1}}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kq}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{sp_k}}\left[\Phi(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k} + \sigma(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right].$$

Первую сумму можно представить в виде $(k+1)$ суммы.

$$\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}}\left\{\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial|x|}{\partial x_{sp}}\left[\Phi(x)A^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\sigma(x)B^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\sigma(x)A^{pq}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Phi(x)B^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right]\right\}=\sum_{p_1\cdots p_k}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{sp}}\left\{\Phi(x)\left[A^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+B^{pq}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right]+\right.$$

$$\left.+\sigma(x)\left[B^{pq}A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+A^{pq}B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right]\right\}.$$

Вторую сумму также представим в виде как $(k+1)$ суммы:

$$\sum_{p_1\cdots p_k}e_{pq}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{sp_1}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_2p_2}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}}\left[\Phi(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_k}+\sigma(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_k}\right],$$

где числа p, p_1 и p_1, p индексы просуммирования, поэтому мы можем поменять их местами:

$$\sum_{p_1\cdots p_kp}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{sp}}\left[\sigma(x)e_{p_1q}A^{pq_1p_2q_2\cdots p_kq_k}+e_{p_1q}\Phi(x)B^{pq_1p_2q_2\cdots p_kq_k}\right].$$

Остальные суммы, преобразуя по этим правилам, перепишем в виде $(k+1)$ суммы, затем собирая все суммы под одной $(k+1)$ суммы, мы получаем:

$$|x|^{k+1}\cdot\frac{\partial^{k+1}\sigma|x|}{\partial x_{s_1q_1}\ldots\partial x_{s_kq_k}\partial x_{sq}}=\sum_{p_1\cdots p_kp}\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_1p_1}}\cdots\frac{\partial|x|}{\partial x_{s_kp_k}}\frac{\partial|x|}{\partial x_{sp}}\left[\sigma(x)A^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq}+\Phi(x)B^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq}\right],$$

здесь коэффициенты $A^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq}$ и $B^{p_1q_1\cdots p_kq_kpq}$ вычисляются по рекуррентным формулам (11), (12).

Как видно из последнего равенства, это равенство является вторым уравнением системы дифференциальных уравнений (10') $(k+1)$ -го порядка вместе k. Таким образом, лемма полностью доказана.

Если системы дифференциальных уравнений (10) умножить на элементы $x_{s_1r_1},\ldots,x_{s_kr_k}$ и просуммировать по индексам $s_1,s_2,\ldots,s_n$, то получим следующую переопределенную систему дифференциальных уравнений k -го порядка:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s_1\cdots s_k}\frac{\partial^k\Phi(x)}{\partial x_{s_1q_1}\ldots\partial x_{s_kq_k}}x_{s_1r_1}\ldots x_{s_kr_k}&=\Phi(x)A^{r_1q_1\cdots r_kq_k}+\sigma(x)B^{r_1q_1\cdots r_kq_k},\\ \sum_{s_1\cdots s_k}\frac{\partial^k\sigma(x)}{\partial x_{s_1q_1}\ldots\partial x_{s_kq_k}}x_{s_1r_1}\ldots x_{s_kr_k}&=\sigma(x)A^{r_1q_1\cdots r_kq_k}+\Phi(x)B^{r_1q_1\cdots r_kq_k},\end{aligned}\right\}.\qquad(14)$$

$$r_1,\ldots,r_k;q_1,\ldots,q_k=1,2,\ldots,n$$

При получении (14) мы пользовались равенством (13).

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2.

Если мы покажем, что для любого k справедливо следующее соотношение, то доказательство теоремы 2 будет завершено.

На самом деле:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^k\{\Phi(xy)-[\Phi(x)\Phi(y)+\sigma(x)\sigma(y)]\}}{\partial y_{r_1q_1}\partial y_{r_2q_2}\ldots\partial y_{r_kq_k}}\right|_{y=E}=0,\\ &\left.\frac{\partial^k\{\sigma(xy)-[\sigma(x)\Phi(y)+\Phi(x)\sigma(y)]\}}{\partial y_{r_1q_1}\partial y_{r_2q_2}\ldots\partial y_{r_kq_k}}\right|_{y=E}=0,\end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

$$r_1,\ldots,r_k;q_1,\ldots,q_k=1,2,\ldots,n.$$

Сначала покажем справедливость первого равенства системы (15).

Положим: $Z = XY$. Тогда первое равенство можно записать в виде:

$$\sum_{s_1\ldots s_k}\left\{\frac{\partial^k\Phi(x)}{\partial z_{s_1q_1}\ldots\partial z_{s_kq_k}}\right\}_{y=E}x_{s_1r_1}\ldots x_{s_kr_k}=\Phi(x)\left\{\frac{\partial^k\Phi(x)}{\partial y_{r_1q_1}\ldots\partial y_{r_kq_k}}\right\}_{y=E}+\sigma(x)\left\{\frac{\partial^k\Phi(x)}{\partial y_{r_1q_1}\ldots\partial y_{r_kq_k}}\right\}_{y=E}.$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{s_1\ldots s_k}\frac{\partial^k\Phi(x)}{\partial x_{s_1q_1}\ldots\partial x_{s_kq_k}}x_{s_1r_1}\ldots x_{s_kr_k}=\Phi(x)\left\{\frac{\partial^k\Phi(x)}{\partial y_{r_1q_1}\ldots\partial y_{r_kq_k}}\right\}_{y=E}+\sigma(x)\left\{\frac{\partial^k\Phi(x)}{\partial y_{r_1q_1}\ldots\partial y_{r_kq_k}}\right\}_{y=E}. \tag{16}$$

Таким образом, мы должны доказать справедливость равенства (16). Мы выше показали, что из переопределенных уравнений (1) можем получить систему дифференциальных уравнений с частными производными (10) и (14). Если при $X = E$ мы учтем начальное условие (**), то из системы (10) получим:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\frac{\partial^k\Phi(x)}{\partial x_{r_1q_1}\ldots\partial x_{r_kq_k}}\right\}_{x=E}=A^{r_1q_1\ldots r_kq_k},\\ &\left\{\frac{\partial^k\sigma(x)}{\partial x_{r_1q_1}\ldots\partial x_{r_kq_k}}\right\}_{x=E}=B^{r_1q_1\ldots r_kq_k}.\end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Если значения постоянных $A^{r_1q_1\ldots r_kq_k}$ и $B^{r_1q_1\ldots r_kq_k}$ подставить в первое уравнение системы (14), то мы снова получим равенство (16).

Теперь мы покажем справедливость второго соотношения системы (15). Второе уравнение системы (15) перепишем в следующем виде:

$$\sum_{s_1\ldots s_k} \frac{\partial^k \sigma(x)}{\partial x_{s_1q_1}\ldots\partial x_{s_kq_k}} x_{s_1r_1}x_{s_2r_2}\ldots x_{s_kr_k} = \sigma(x)\left\{\frac{\partial^k \Phi(x)}{\partial y_{r_1q_1}\ldots\partial y_{r_kq_k}}\right\}_{y=E} + \Phi(x)\left\{\frac{\partial^k \Phi(x)}{\partial y_{r_1q_1}\ldots\partial y_{r_kq_k}}\right\}_{y=E}. \quad (18)$$

Значения этих постоянных матриц $A^{r_1q_1\ldots r_kq_k}$ и $B^{r_1q_1\ldots r_kq_k}$ из (17) подставляя в (14) получим равенство (18).

Следовательно, мы доказали, что каждое аналитическое решение (если оно существует) в окрестности единичной матрицы $X = E$, удовлетворяющее начальному условию (**), является также решением системы функциональных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}\Phi(xy) &= \Phi(x)\Phi(y) + \sigma(x)\sigma(y),\\ \sigma(xy) &= \sigma(x)\Phi(y) + \Phi(x)\sigma(y).\end{aligned}\right\}.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Следствие. Если аналитическая функция и её все частные производные в некоторой окрестности равняются нулю, то эта функция сама равна нулю тождественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вандер Варден Б.Л. Метод теории групп в квантовой механике. ДНТВУ. Харьков, 1938, - 199 с.
2. Данфорд Н., Щварц Дж. Линейные операторы. Общая теория, том 1, М., 1962, 595 с.
3. Рагимов М.Б. О спектре Тейлора бесконечного числа коммутирующих наборов операторов. ДАН Азерб. ССР. 1984. т. 10. №10, с.3-5.
4. Ализаде М.И. Приведение операторного уравнения представления группы Ли к векторному функциональному уравнению. Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 1999, №1, с. 139-143.
5. Ализаде М.И. Об аналитических решениях возмущенных систем характеристических дифференциальных уравнений Ли. Тематический сборник научных трудов. Сер. физ.-мат. наук. 1987. с.14-15.

BİR ARTIQLAŞMIŞ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

M.İ.ƏLİZADƏ

XÜLASƏ

Bu məqalədə bir sinif funksional tənliklər sisteminə baxılır. İsbat edilir ki, funksional tənliklər sisteminin həlli müəyyən şərtlər daxilində uyğun artıqlaşmış tənliklər sisteminin həllidir. Tərsinə isbat edilir ki, baxılan diferensial tənliklər sisteminin başlanğıc şərtini ödəyən həlli uyğun funksional tənliklər sisteminin də həllidir.

ON SOLVABILITY OF A SYSTEM OF OVERDETERMINED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES

M.I.ALIZADE

SUMMARY

In this article a class of system of functional equations is considered. It is proved that under some conditions the solution of the system functional equations is a solution of corresponding overdetermined system. Conversely, the solution of the system. Of differential equations with initial conditions is a solution of corresponding system of functional equations.